微分方程问题双边不等式数学规划解法的进展

朱宝安
(天津大学分校)

[摘要] 微分方程问题双边不等式数学规划解法与现有的其它近似解法不同。该方法在未知解析解的情况下，可找到较精确解偏大的最小近似解和偏小的最大近似解，可用数值表示出近似解的上边界和下边界，使算题人员在计算过程中随时控制计算精确程度， 既不浪费机时也不致于盲目终止计算，使计算过程终止在经济精度上。

1. 解题的思路和近年来的进展

微分方程问题双边不等式数学规划解法是在近年来逐步完善的微分方程最大值原理的基础上生成的，该方法把加权残值法与数学规划技巧结合起来形成一种颇具特色的数值解法。加权残值法是一种加权积分法，解题时应事先构造试函数 $u(x,a)$，此处的试函数是由坐标函数 $u_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$的某种线性组合表示的，x 可以是一维的，也可是多维的自变量，a 是待定系数，它的分量与 u_i 的线性组合表示微分方程问题的近似解。由于 $u(x,a)$不是微分方程问题的精确解，所以将它代入微分方程中以后，微分方程式不再是原来的等式，而必然出现残差。对于上述微分方程的残差乘以权函数，然后再进行积分并令其为零，使可以建立若干个代数方程式。对于微分方程问题的某些定解条件，也可用类似的方法得到另一批代数方程式。以上所有的代数方程式的数目恰等于待定系数 a 的分量数目时，求解代数方程组可得到一系列待定系数以及最后的近似解。在双边不等式数学规划近似解法中，当前对于权函数只取为 Dirac delta 函数或只取为 1。也就是，当前只用到了加权残值法中的两个基本方法，即配点法或子域法。以上所说的是通常的加权残值法，然而，在本文中所用到的是数学规划加权残值法。把数学规划与加权残值法结合起来寻求微分方程问题最佳近似解的工作可见于文献 [1,2]。文献[1] 把配点法与线性规划中的单纯形法结合起来，考虑到问题的物理背景条件，分析了微分方程中控制项与解的单调增性质，建立了双边不等式，为构造数学规划中的约束不等式找到一种巧妙的方法。 但文献[1] 的局限性是显然的，最大的局根性是按具体问题给出的独特方法，而没有提供更为普遍的理论分析，缺乏一般性意义，特别是根本没有涉及残差关于解的弱单调性必须蕴涵强单调性的重要的理论问题。文献[2] 所讨论的内容已经增加了一般性意义，因为以微分方程最大值原理为立论基础，这就开辟了用数学规划方法求解微分方程问题近似解的广泛的应用领域。 文献 [2] 所讨论的例题是传质方程，个别技巧多，推广文献[2] 的方法仍较困难，且限于配点法和线性规划；该方法也没有论及残差关于解的弱单调性必须蕴涵相应的强单调

性问题，这是不足之处。但文献[2]较之文献[1]显然前进了许多，除上述的最大值原理的应用以外，文献[2]还特别注意到一个极为重要的问题，即所求得的近似解是否满足数学规划中的约束不等式。实际上，作者已经发现了在本文中强调指出的弱单调性必须蕴涵其强单调性的最基本的理论问题，应该说这种发现本身就是很大的贡献。近30年来，关于数学规划加权残值法在基础理论和方法诸方面没有大的突破，以上两文献具有代表性，其它文章暂不一一详述。

近几年来，我国在微分方程问题双边不等式数学规划解法方面已有较大的发展。在生成数学规划加权残值法的基础理论方面,文献[3,4]中阐明了残差关于解的弱单调性必须蕴涵其相应的强单调性；在具体方法上，我们已经把近年来已被广泛应用于机械优化设计的非线规划技术(如约束随机方向搜索法、罚函数法等)与配点法以及子域法结合起来。并且，所求得的近似解，其误差界不象以前那样只是用残差的大小来标识，而是直接用更为直观的待求函数的上边界和下边界来表示。这样，就可使算题人员不再为计算结果的误差问题感到困惑。另外，在国外，数学规划加权残值法的应用领域已有明显的拓宽。据最新资料，给出的Navier－Stokes方程近似解，其精度之高和收敛速度之快是其它数值解法难以相比的，近似解的误差为0.038%，在IBM 370/168计算机上只需机时5.61秒。这表明本文简介的方法具有很强的吸引力。上例是在流体力学中的应用。 实际上，在工程最优控制方面，在有限元法的理论研究中也已开展了有成效的探索。

根据国内外的资料，基本上可对本课题的研究价值进行状态判断。微分方程问题双边不等式数学规划解法是一种新的半解析方法，解题方法和程序简单，微型计算机可解大型题目，收敛速度快，计算精度高，误差界可直观表示，应用范围可望迅速拓宽。另一方面，各种数值解法的生成和发展都是由它的实用价值决定的，我们在展望双边不等式数学规划解法应用前景的同时，还需要深入地研究其在适用性方面还存在哪些困难。

2. 双边不等式数学规划解法面临的问题

如上所述，该方法确实具有许多优点，但是，由于它生成的历史短浅，目前尚有若干理论和方法上的问题亟待解决。概括起来有以下问题。

(1) 残差关于解的弱单调性蕴涵其强单调性的充分条件

微分方程问题双边不等式数学规划解法的最主要的理论基础是控制方程及定解条件的残差关于解的弱单调性充分地蕴涵其强单调性。近十几年来，微分方程最大值原理的研究工作已得到很大发展，对于多种类型的微分方程，已证明了最大值原理的存在性。在此基础上，考虑到问题的定解条件，可证明其中许多问题确实存在着残差关于解的强单调性。由于我们在建立数学规划约束条件时，需对残差进行加权积分，于是就出现了弱单调性是否充分地蕴涵其强单调性的问题。文献[5]曾证明了某些微分算子和微分方程问题在一定条件下弱单调性蕴涵其相应的强单调性。实际上，这些条件还可以被减弱。从应用的角度来分析具体微分方程问题时，要比纯数学分析所要求的条件宽松许多。在具体的学科领域中如何既保持在数学原理上的严密性，又能放宽条件，仍然是推广这种数值方法所面临的难题。对于更多的科技工作者来说，他们所期望的是，对某种新鲜而有效的数值方法由专业数学工作者在理论上给出严格分析的同时，还能给出较为容易接受的初等描述。

(2) 试函数的选取

为有效地应用本文提出的现代的数学规划加权残值法，通常以级数表示试函数。我们总是希望试函数中的待定系数是安定的[6]，也就是当级数取无穷多项时，每一个待定系数均收敛于有界常数。为使计算精度随着试函数级数被截取的项的数目增加而提高，如何在选择试函数时事先识别试函数中待定系数的安定性是推广数学规划加权残值法和提高计算精度的亟待探索的课题。

（3）尚需大量算例的考验

本文所描述的双边不等式数学规划解法，其主要特点是，所求近似解的误差界是以直观的形式表示的，而在此之前的文献，在误差估计中是以残差的大小来间接表示的。我们在此推荐的前一种数值解法，直至目前，仍然缺少大量的各种具体算例的考验。

参　考　文　献

[1] F. C. Appl and H. M. Hung, A Principle for Convergent Upper and Lower Bounds, *Int. J. Mech. Sci.*, 1964. Vol.6, pp.381 — 389.

[2] B. A. Finlayson and L. E. Scriven, Upper and Lower Bounds for Solutions to the Transport Equation, *A. L. ch. E. Journal*, Vol. 12, No.6, 1966.

[3] 朱宝安，误差界与权函数——兼论线性规划加权残值法，第三届全国加权残值法会议论文集，西南交通大学出版社，1989.

[4] 朱宝安，数学规划加权残值法，天津大学学报，1991.4.

[5] U. Mosco，变分不等式近似解引论，王烈衡，王荩贤等译，上海科学技术出版社，1985.

[6] 胡海昌，加权残差法的几个理论问题，合肥工业大学学报，1984. 4.

THE DEVELOPMENT OF THE SOLVING PROCESS FOR DIFFERENTIAL EQUATION PROBLEMS BY USE OF MATHEMATICAL PROGRAMMING AND BILATERAL INEQUALITY

Zhu Baoan

(*Tianjin University Branch*)

Abstract

The solving process for differential equation problems by use of mathematial programming and bilateral inequality is different from other existing approximate solution. By use of this method, we can find the minimal approximate solution which has more large value than that of accurate solution and the maxinum solution which has more less value than that of accurate solution and express the upper boundary and lower boundary of the approximate solution with the numerical value whenever the analytic solution is available or not. Besides that, the calculator can control the accurate degree of calculation in the process of calculating at any time, neither waste computation spending nor stop calculating blndly. So, the calculation process is determined at the economical accuration.